ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ ĐẠI THANH

DÃY FIBONACCI: ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT, HỢP THÀNH VÀ ĐỒNG NHẤT THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ ĐẠI THANH

DÃY FIBONACCI: ƯỚC CHUNG LỚN NHẤT, HỢP THÀNH VÀ ĐỒNG NHẤT THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TSKH. HÀ HUY KHOÁI

Thái Nguyên - 2016

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành với sự hướng dẫn của GS.TSKH. Hà Huy Khoái (Trường Đại học Thăng Long). Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tác giả muốn gửi những lời cảm ơn tốt đẹp nhất tới tập thể Lớp B, cao học Toán khóa 8 (2014 - 2016) đã động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong suốt quá trình học tập.

Nhân dịp này, tác giả cũng xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng, Ban Giám hiệu và các đồng nghiệp ở Trường THPT Nguyễn Đức Cảnh, Huyện Kiến Thụy, Thành phố Hải Phòng đã tạo điều kiện cho tác giả hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập và công tác của mình.

Cuối cùng, tác giả muốn dành những lời cảm ơn đặc biệt nhất đến bố mẹ và đại gia đình đã luôn động viên và chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành tốt luận văn này.

Mở đầu

Số học là một trong những lĩnh vực cổ xưa nhất của Toán học, và cũng là lĩnh vực tồn tại nhiều nhất những bài toán, những giả thuyết chưa có câu trả lời. Trên con đường tìm kiếm lời giải cho những giả thuyết đó, nhiều tư tưởng lớn, nhiều lí thuyết lớn của toán học đã nẩy sinh. Hơn nữa, trong những năm gần đây, Số học không chỉ là một lĩnh vực của toán học lí thuyết, mà còn là có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt trong lĩnh vực bảo mật thông tin.

Dãy Fibonacci là dãy số vô hạn các số tự nhiên bắt đầu bằng hai phần tử 0 và 1 hoặc 1 và 1, các phần tử sau đó được thiết lập theo quy tắc mỗi phần tử luôn bằng tổng hai phần tử trước nó.

Chúng ta cũng đã biết rằng, các số Fibonacci tham gia vào nhiều vấn đề của toán học đến nỗi từ nhiều năm nay, có một tạp chí toán học chỉ chuyên dành nghiên cứu các số Fibonacci.

Từ thực tiễn đó, tôi chọn nghiên cứu đề tài *"Dãy Fibonacci: Ước chung lớn nhất, hợp thành và đồng nhất thức"* làm luận văn thạc sĩ của mình.

Chúng tôi bỏ qua việc trình bày những tính chất cơ bản của dãy Fibonacci, vì đã có nhiều tài liệu đề cập đến. Ở đây chỉ chú trọng giới thiệu hai kết quả nghiên cứu gần đây về ước chung lớn nhất của các số hạng trong dãy nâng Fibonacci, và về hợp thành của các số Fibonacci, tức là việc biểu diễn số Fibonacci dưới dạng tổng các số nguyên dương. Đây là những vấn đề được quan tâm nghiên cứu trong lý thuyết số.

- *Chương 1. Ước chung lớn nhất trong dãy nâng của dãy Fibonacci* được dành để trình bày về dãy nâng Fibonacci, là một mở rộng của dãy Fibonacci cổ điển. Nếu như đối với dãy Fibonacci cổ điển, ước chung lớn nhất của hai số hạng liên tiếp luôn bằng 1, thì với dãy nâng Fibonacci, điều này không còn đúng nữa. Các kết quả trình bày trong chương này chỉ ra những lớp dãy nâng Fibonacci mà ước chung lớn nhất nói trên là bị chặn.

- *Chương 2. Hợp thành của các số Fibonacci* trình bày về hợp thành của các số Fibonacci. Một số công thức cho hợp thành của số Fibonacci sẽ được chứng minh trong chương này. Phương pháp tiếp cận ở đây là sử dụng các monoit tự do, lập nên bởi các hợp thành với phép toán ghép.

Thái Nguyên, ngày 27 tháng 5 năm 2016

Tác giả

Đỗ Đại Thanh

Chương 1

Ước chung lớn nhất trong dãy nâng của dãy Fibonacci

1.1 Một số tính chất cơ sở

Định nghĩa 1.1.1. Dãy Fibonacci là dãy số xác định bởi $F_1 = 1, F_2 = 1$ và

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \qquad \text{với } n \geq 3.$$

Định nghĩa 1.1.2. Dãy Lucas là dãy số xác định bởi $L_1 = 1, L_2 = 3$ và

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1}, \qquad \text{với } n \geq 3.$$

Dãy Fibonacci tổng quát được xác định bởi $G_1 = \alpha, G_2 = \beta$, và

$$G_n = \alpha F_{n-2} + \beta F_{n-1}, \qquad \text{với } n \geq 3.$$

Nếu $\alpha = \beta = 1$, thì dãy Fibonacci tổng quát G_n là dãy Fibonacci F_n.
Nếu $\alpha = 1$ và $\beta = 3$, thì dãy Fibonacci tổng quát G_n là dãy Lucas L_n.
Xét dãy $(F_n + a)$, với a là số nguyên nào đó. Ta gọi đó là dãy nâng Fibonacci.
Các phần tử liên tiếp của dãy Fibonacci là những số nguyên tố cùng nhau, nhưng với dãy nâng Fibonacci thì điều này không còn đúng nữa. Năm 1971, Hoggatt đã lưu ý rằng

$$\gcd(F_{4n+1} + 1, F_{4n+2} + 1) = L_{2n},$$

$$\gcd(F_{4n+1} - 1, F_{4n+2} - 1) = F_{2n},$$

$$\gcd(F_{4n+3}-1, F_{4n+4}-1) = L_{2n+1}.$$

Nghĩa là, các phần tử liên tiếp của dãy nâng Fibonacci bởi ± 1 không phải luôn luôn là những số nguyên tố cùng nhau. Nếu đặt

$$f_n(a) = \gcd(F_n + a, F_{n+1} + a)$$

thì $(f_n(0))$ là dãy không đổi $1, 1, 1, \ldots$, nhưng $(f_n(\pm 1))$ là không bị chặn.

Năm 2003 Hernández và Lucas đã chứng minh rằng có một số không đổi c mà

$$\gcd(F_m + a, F_n + a) > e^{cm},$$

đúng đối với vô hạn các cặp số nguyên dương $m > n$.

Trong luận văn này, chúng ta sẽ thấy rằng $(f_n(a))$ bị chặn nếu $a \neq \pm 1$. Cụ thể, chúng ta sẽ chứng minh hai định lý sau.

Định lí 1.1.3. *Với mọi số nguyên $(\alpha), (\beta)$, n và a với $\alpha^2 + (\alpha.\beta) - \beta^2 - a^2 \neq 0$, chúng ta có*

$$\gcd(G_{2n-1} + a, G_{2n} + a) \leq \left|\alpha^2 + (\alpha.\beta) - \beta^2 - a^2\right|. \tag{1.1}$$

Định lí 1.1.4. *Với mọi số nguyên $(\alpha), (\beta)$, n và a với $\alpha^2 + (\alpha.\beta) - \beta^2 + a^2 \neq 0$, chúng ta có*

$$\gcd(G_{2n} + a, G_{2n+1} + a) \leq \left|\alpha^2 + (\alpha.\beta) - \beta^2 + a^2\right|. \tag{1.2}$$

Giả sử $\alpha = \beta = 1$ trong Định lí 1.1.3 và Định lí 1.1.4. Chúng ta rút ra được hệ quả sau:

Hệ quả 1.1.5. *Với mọi số nguyên n và a*

$$\gcd(F_{2n-1} + a, F_{2n} + a) \leq \left|a^2 - 1\right|, \quad \textit{nếu } a \neq \pm 1,$$
$$\gcd(F_{2n} + a, F_{2n+1} + a) \leq a^2 + 1.$$

Do đó, chúng ta kết luận rằng $(f_n(a))$ bị chặn nếu $a \neq \pm 1$. Và một hệ quả khác

$$l_n(a) = \gcd(L_n + a, L_{n+1} + a)$$

chỉ nhận hữu hạn giá trị.

Hệ quả 1.1.6. *Với số nguyên n và a, ta có*

$$\begin{aligned}\gcd(L_{2n-1} + a, L_{2n} + a) &\leq a^2 + 5,\\ \gcd(L_{2n} + a, L_{2n+1} + a) &\leq \left|a^2 - 5\right|.\end{aligned}$$

Giả sử $\alpha = 1$ và $\beta = 3$ trong Định lí 1.1.3 và Định lí 1.1.4. Chúng ta kết luận rằng $l_n(a)$ bị chặn đối với số nguyên a tuỳ ý.

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ suy ra được hai bổ đề cơ bản. Từ đó, chúng ta xác định được $f_n(1), f_n(2), f_n(-1), f_n(-2)$ và $l_n(1)$, trong phần 3, 4 và 5.

Trong phần cuối, chúng ta sẽ chứng minh Định lí 1.1.3 và Định lí 1.1.4.

Bổ đề 1.1.7. *Với số nguyên n, k và a*

$$\gcd(G_n + aF_k, G_{n-1} - aF_{k+1}) = \gcd(G_{n-2} + aF_{k+2}, G_{n-3} - aF_{k+3}). \tag{1.3}$$

Chứng minh. Do $\gcd(a,b) = \gcd(a + bc, b)$ đối với bất kì số nguyên a, b và c, chúng ta có

$$\begin{aligned}\gcd(G_n + aF_k, G_{n-1} - aF_{k+1}) &= \gcd(G_n + aF_k - (G_{n-1} - aF_{k+1}), (G_{n-1} - aF_{k+1}))\\ &= \gcd(G_{n-2} + aF_{k+2}, G_{n-1} - aF_{k+1})\\ &= \gcd(G_{n-2} + aF_{k+2}, G_{n-1} - aF_{k+1} - (G_{n-2} + aF_{k+2}))\\ &= \gcd(G_{n-2} + aF_{k+2}, G_{n-3} - aF_{k+3}).\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 1.1.8. *Với số nguyên m, k và a,*

$$\gcd(G_m + a, G_{m+1} + a) = \gcd(G_{m-(2k)} + aF_{2k-1}, G_{m-(2k+1)} - aF_{2k}) \tag{1.4}$$

Chứng minh. Chúng ta rút gọn $\gcd(G_m + a, G_{m+1} + a)$,

$$\begin{aligned}\gcd(G_m + a, G_{m+1} + a) &= \gcd(G_m + a, G_{m+1} + a - (G_m + a))\\ &= \gcd(G_m + a, G_{m-1}).\end{aligned}$$

Vì $F_{-1} = 1,$ và $F_0 = 0$, chúng ta có thể viết

$$= \gcd(G_m + a, G_{m+1} + a) = \gcd(G_m + aF_{-1}, G_{m-1} - aF_0),$$

và áp dụng (1.3) k lần để rút ra kết quả. □

Lưu ý rằng, ta gọi dãy số $\{F_n + k\}$ là dãy số $f_n(k)$.

1.2 Dãy số $f_n(1)$

Định lí 1.2.1. *Với mọi số nguyên n, chúng ta có*

$$\gcd(F_{4n-1} + 1, F_{4n} + 1) = F_{2n-1}, \tag{1.5}$$

$$\gcd(F_{4n} + 1, F_{4n+1} + 1) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } n \equiv 1 \mod 3,\\ 1, & \text{nếu ngược lại,}\end{cases} \tag{1.6}$$

$$\gcd(F_{4n+1} + 1, F_{4n+2} + 1) = L_{2n}, \tag{1.7}$$

$$\gcd(F_{4n+2} + 1, F_{4n+3} + 1) = \begin{cases} 2, & \text{nếu } n \equiv 2 \mod 3,\\ 1, & \text{nếu ngược lại.}\end{cases} \tag{1.8}$$

Chứng minh. Giả sử $m = 4n - 1, k = n,$ và $a = 1$ trong (1.4) :

$$\begin{aligned}\gcd(F_{4n-1} + 1, F_{4n} + 1) &= \gcd(F_{2n-1} + F_{2n-1}, F_{2n-2} - F_{2n})\\ &= gcd(2F_{2n-1}, -F_{2n-1})\\ &= F_{2n-1},\end{aligned}$$

cho ta (1.5).

Giả sử $m = 4n + 1, k = n,$ và $a = 1$ trong (1.4) :

$$\gcd(F_{4n+1}, F_{4n+2} + 1) = \gcd(F_{2n+1} + F_{2n-1}, F_{2n} + F_{2n})$$